

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
08.02.2026
CLASA a IX-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: - Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului precizat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu.

Subiectul I (20 puncte)

Să se determine numărul real x care satisface proprietatea

$$\left[\frac{3x-3}{2} \right] = \left[\frac{3x-1}{6} \right] + \left[\frac{3x+1}{6} \right] + \frac{2x+1}{3},$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a .

Soluție:

Folosim relația $[3a] = [a] + \left[a + \frac{1}{3} \right] + \left[a + \frac{2}{3} \right]$

$$\begin{aligned} \left[\frac{3x-3}{2} \right] &= \left[3 \cdot \frac{3x-3}{6} \right] = \left[\frac{3x-3}{6} \right] + \left[\frac{3x-3}{6} + \frac{1}{3} \right] + \left[\frac{3x-3}{6} + \frac{2}{3} \right] = \\ &= \left[\frac{x-1}{2} \right] + \left[\frac{3x-1}{6} \right] + \left[\frac{3x+1}{6} \right] \\ \Rightarrow \left[\frac{x-1}{2} \right] + \left[\frac{3x-1}{6} \right] + \left[\frac{3x+1}{6} \right] &= \left[\frac{3x-1}{6} \right] + \left[\frac{3x+1}{6} \right] + \frac{2x+1}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{x-1}{2} \right] = \frac{2x+1}{3} \in \mathbb{Z}$$

Notăm $\frac{2x+1}{3} = k, k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow x = \frac{3k-1}{2} \text{ și } k \leq \frac{x-1}{2} < k+1 \Leftrightarrow 2k \leq \frac{3k-1}{2} - 1 < 2k+2$$

$$\Rightarrow 4k \leq 3k-3 < 4k+4 \Rightarrow -7 < k \leq -3 \Rightarrow k \in \{-6; -5; -4; -3\}$$

$$\Rightarrow x \in \left\{ \frac{-19}{2}; -8; \frac{-13}{2}; -5 \right\}.$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Folosește relația $[3a] = [a] + \left[a + \frac{1}{3}\right] + \left[a + \frac{2}{3}\right]$	2p
Deduce $\left[\frac{3x-3}{2}\right] = \left[3 \cdot \frac{3x-3}{6}\right] = \left[\frac{3x-3}{6}\right] + \left[\frac{3x-3}{6} + \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{3x-3}{6} + \frac{2}{3}\right] =$ $= \left[\frac{x-1}{2}\right] + \left[\frac{3x-1}{6}\right] + \left[\frac{3x+1}{6}\right]$	4p
Deduce $\left[\frac{x-1}{2}\right] + \left[\frac{3x-1}{6}\right] + \left[\frac{3x+1}{6}\right] = \left[\frac{3x-1}{6}\right] + \left[\frac{3x+1}{6}\right] + \frac{2x+1}{3}$ $\Rightarrow \left[\frac{x-1}{2}\right] = \frac{2x+1}{3} \in \mathbb{Z}$	2p
Notăm $\frac{2x+1}{3} = k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{3k-1}{2}$	3p
Din $k \leq \frac{x-1}{2} < k+1$ rezultă $2k \leq \frac{3k-1}{2} - 1 < 2k+2$	3p
Deduce : $4k \leq 3k-3 < 4k+4 \Rightarrow -7 < k \leq -3 \Rightarrow k \in \{-6; -5; -4; -3\}$	4p
Deduce $x \in \left\{\frac{-19}{2}; -8; \frac{-13}{2}; -5\right\}$.	2p
Total	20p

Subiectul II (20 puncte)

Se consideră $ABCD$ patrulater convex, E mijlocul segmentului (AB) și $M \in (BC)$, $N \in (AD)$, astfel încât $\frac{BM}{BC} = \frac{AN}{AD} = k$.

- a) Să se exprime \overrightarrow{EM} și \overrightarrow{EN} în funcție de k și \overrightarrow{EA} , \overrightarrow{EC} , \overrightarrow{ED} .
 b) Să se arate că mijloacele segmentelor (AB) , (MN) și (CD) sunt puncte coliniare.

Soluție:

$$a) \quad \overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AE} + k\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{EA} + k(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC}) = -\overrightarrow{EA} + k\overrightarrow{EA} + k\overrightarrow{EC} =$$

$$= (k-1)\overrightarrow{EA} + k\overrightarrow{EC}$$

$$\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{EA} + k\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EA} + k(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}) = \overrightarrow{EA} - k\overrightarrow{EA} + k\overrightarrow{ED} =$$

$$= (1-k)\overrightarrow{EA} + k\overrightarrow{ED}$$

- b) Fie F – mijlocul lui (MN) și G – mijlocul lui (DC)

$$\overrightarrow{EF} = \frac{\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EN}}{2} = \frac{(k-1)\overrightarrow{EA} + k\overrightarrow{EC} + (1-k)\overrightarrow{EA} + k\overrightarrow{ED}}{2} = \frac{k(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED})}{2}$$

$$\overrightarrow{EG} = \frac{\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED}}{2}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{EG} \Rightarrow \overrightarrow{EF} \text{ și } \overrightarrow{EG} - \text{coliniari} \Rightarrow E, F, G - \text{coliniare}$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) Deduce $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AE} + k\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{EA} + k(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC})$	3p
$\overrightarrow{EM} = -\overrightarrow{EA} + k\overrightarrow{EA} + k\overrightarrow{EC} = (k-1)\overrightarrow{EA} + k\overrightarrow{EC}$	2p
Deduce $\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{EA} + k\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EA} + k(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED})$	3p
$\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{EA} - k\overrightarrow{EA} + k\overrightarrow{ED} = (1-k)\overrightarrow{EA} + k\overrightarrow{ED}$	2p
b) Fie F – mijlocul lui (MN) și G – mijlocul lui (DC) . Arată că $\overrightarrow{EF} = \frac{\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EN}}{2} = \frac{(k-1)\overrightarrow{EA} + k\overrightarrow{EC} + (1-k)\overrightarrow{EA} + k\overrightarrow{ED}}{2} = \frac{k(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED})}{2}$	5p
Arată că $\overrightarrow{EG} = \frac{\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED}}{2}$	2p
$\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{EG} \Rightarrow \overrightarrow{EF} \text{ și } \overrightarrow{EG} - \text{coliniari} \Rightarrow E, F, G - \text{coliniare}$	3p
Total	20p

Subiectul III (25 puncte)

Fie triunghiul ABC și D, E, F mijloacele laturilor BC, CA respectiv AB . Notăm H_1, H_2, H_3 ortocentrele triunghiurilor AFE, BDF respectiv CDE și O centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Să se arate că dacă O este centrul de greutate al triunghiului $H_1H_2H_3$ atunci triunghiul ABC este echilateral.

Soluție:

Fie H – ortocentrul triunghiului ABC

Din $EH_1 \perp AB$ și $CH \perp AB$ rezultă că $EH_1 \parallel CH$.

Cum $AE = EC \Rightarrow EH_1$ este linie mijlocie în triunghiul $AHC \Rightarrow H_1$ este mijlocul segmentului AH și deci $\overrightarrow{OH_1} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OH}}{2}$.

Analog, H_2 este mijlocul segmentului BH și H_3 este mijlocul segmentului CH și atunci

$$\overrightarrow{OH_2} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OH}}{2} \text{ și } \overrightarrow{OH_3} = \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OH}}{2}.$$

$$\text{Obținem astfel: } \overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OH_2} + \overrightarrow{OH_3} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OH}}{2} + \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OH}}{2} + \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OH}}{2} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + 3 \cdot \overrightarrow{OH}}{2}$$

Dar O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Din teorema lui Sylvester obținem:

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$\text{Atunci: } \overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OH_2} + \overrightarrow{OH_3} = \frac{\overrightarrow{OH} + 3 \cdot \overrightarrow{OH}}{2} = \frac{4 \cdot \overrightarrow{OH}}{2} = 2 \cdot \overrightarrow{OH}$$

$$\begin{aligned} \text{Dacă } O \text{ este centrul de greutate al triunghiului } H_1H_2H_3 \text{ atunci } \overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OH_2} + \overrightarrow{OH_3} &= \vec{0} \\ \Rightarrow 2 \cdot \overrightarrow{OH} &= \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OH} = \vec{0} \end{aligned}$$

deci $O = H \Rightarrow \triangle ABC$ este echilateral.



Detalii de rezolvare	Barem asociat
Deduce $EH_1 \parallel CH$ și H_1 este mijlocul segmentului AH	4p
Deduce H_2 este mijlocul segmentului BH	3p
Deduce H_3 este mijlocul segmentului CH	3p
Deduce $\overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OH_2} + \overrightarrow{OH_3} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OH}}{2} + \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OH}}{2} + \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OH}}{2} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + 3 \cdot \overrightarrow{OH}}{2}$	3p
$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$	3p
$\overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OH_2} + \overrightarrow{OH_3} = \frac{\overrightarrow{OH} + 3 \cdot \overrightarrow{OH}}{2} = \frac{4 \cdot \overrightarrow{OH}}{2} = 2 \cdot \overrightarrow{OH}$	3p
$\overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OH_2} + \overrightarrow{OH_3} = \vec{0}$	3p
Deduce din $\overrightarrow{OH} = \vec{0}$ că $\triangle ABC$ este echilateral	3p
Total	25p

Subiectul IV (25 puncte)

Fie $a, b, c, d > 0$ astfel încât $a + b + c + d = 2$. Demonstrați că

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+d} + \frac{1}{c+d} \geq \frac{9}{4} \left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+d} \right)$$

Soluție:

Folosim inegalitatea $\frac{x+y+z}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$ pentru orice $x, y, z > 0$ care este echivalentă cu

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}.$$

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+d} \geq \frac{9}{3a+b+c+d} = \frac{9}{2+2a} = \frac{9}{2(1+a)}$$

Analog,

$$\frac{1}{b+a} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+d} \geq \frac{9}{2(1+b)}$$

$$\frac{1}{c+a} + \frac{1}{c+b} + \frac{1}{c+d} \geq \frac{9}{2(1+c)}$$

$$\frac{1}{d+a} + \frac{1}{d+b} + \frac{1}{d+c} \geq \frac{9}{2(1+d)}$$

Adunând ultimele 4 relații, obținem

$$2 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+d} + \frac{1}{c+d} \right) \geq \frac{9}{2} \left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+d} \right)$$

Înmulțind cu $\frac{1}{2}$ ultima relație, obținem relația cerută.

Avem egalitate pentru $a = b = c = d = \frac{1}{2}$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Se folosește inegalitatea $M_a \geq M_h$: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$	5p
Se deduce că $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+d} \geq \frac{9}{2(1+a)}$	4p
Se deduce că $\frac{1}{b+a} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+d} \geq \frac{9}{2(1+b)}$	4p
Se deduce că $\frac{1}{c+a} + \frac{1}{c+b} + \frac{1}{c+d} \geq \frac{9}{2(1+c)}$	4p
Se deduce că $\frac{1}{d+a} + \frac{1}{d+b} + \frac{1}{d+c} \geq \frac{9}{2(1+d)}$	4p
Se adună relațiile și se obține relația din enunț.	2p
Avem egalitate pentru $a = b = c = d = \frac{1}{2}$	2p
Total	25p